

קורס מבוא למתמטיקה לכלכלנים

פרק 15 - חשבון אינטגרלי - האינטגרל הכללי

תוכן העניינים

1. חישובי אינטגרלים.....1
2. מציאת פונקציה קדומה.....6

חישובי אינטגרלים:

סיכום כללי:

הגדרה וכללי האינטגרציה:

- כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

- עבור מקדם קבוע a נקבל: $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

- כללי האינטגרציה של פונקציות טריגונומטריות:

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \int \cos x dx = \sin x + c, \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c, \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

שאלות:

(1) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^3 dx$ ב. $\int 12x^5 dx$

ג. $\int x^4 dx$ ד. $\int 2x^3 dx$

ה. $\int \frac{2}{3} x^5 dx$ ו. $\int 7 dx$

ז. $\int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx$ ח. $\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx$

(2) מצא את האינטגרלים הבאים:

א. $\int x^{-3} dx$ ב. $\int \frac{1}{x^3} dx$

ג. $\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx$ ד. $\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx$

(3) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \sqrt{x} dx & \text{ב.} \\ \int x^{\frac{1}{2}} dx & \text{א.} \\ \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx & \text{ד.} \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx & \text{ג.} \end{array}$$

(4) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll} \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx & \text{ג.} & \int 3(2-7x)^4 dx & \text{ב.} & \int (5x-1)^3 dx & \text{א.} \\ \int \sqrt{ax+b} dx & \text{ה.} & \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx & \text{ד.} \end{array}$$

(5) מצא את תוצאת החילוק :

$$\begin{array}{ll} \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x-1} = & \text{ב.} \\ \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x-3} = & \text{ד.} \\ \frac{x^2 - 5x - 14}{x+2} = & \text{א.} \\ \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x+3} = & \text{ג.} \\ \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x+5} = & \text{ה.} \end{array}$$

(6) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x-1} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x-3} dx & \text{ד.} \\ \int \frac{2x^5 + x^4 - 4x^2 + 1}{2x+1} dx & \text{ו.} \\ \int \frac{x^2 - 5x - 14}{x+2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x+3} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x+5} dx & \text{ה.} \end{array}$$

(7) מצא את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{ll} \int \frac{x^2}{(x^3+6)^2} dx & \text{ב.} \\ \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx & \text{ד.} \\ \int 8x(x^2+1)^3 dx & \text{ו.} \\ \int -\frac{2x}{(x^2-1)^2} dx & \text{א.} \\ \int \frac{x-2}{(x^2-4x+1)^2} dx & \text{ג.} \\ \int \frac{6x-3}{\sqrt{x-x^2}} dx & \text{ה.} \\ \int (2-x^2)(6x-x^3)^2 dx & \text{ז.} \end{array}$$

(8) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int \left(\sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx$$

$$\text{ב. } \int \left(\cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx$$

$$\text{ג. } \int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx$$

(9) חשב את האינטגרלים הבאים (שימוש בזהויות) :

$$\text{א. } \int (2 \sin x \cos x) dx \quad \text{ב. } \int (\sin 3x \cos 3x) dx$$

$$\text{ג. } \int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx \quad \text{ד. } \int (\sin^2 x) dx$$

(10) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx \quad \text{ב. } \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx$$

$$\text{ג. } \int (\cos x \sin^2 x) dx$$

(11) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\text{א. } \int \left(\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3} \right) dx$$

$$\text{ב. } \int \frac{1}{\cos^2 4x} dx$$

$$\text{ג. } \int \frac{1}{\sin^2 10x} dx$$

$$\text{ד. } \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx$$

$$\text{ה. } \int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$

$$\text{ו. } \int (\cos x + \sin x)^2 dx$$

$$\text{ז. } \int (\sin x \cos x \cos(2x)) dx$$

$$\text{ח. } \int \tan^2 x dx$$

$$\text{ט. } \int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx$$

$$\text{י. } \int \cos^2 x dx$$

$$\text{יא. } \int \sin^2 4x dx$$

(12) חשב את ערכי האינטגרלים הבאים (שאלות אתגר):

א. $\int (\cos^4 x + \sin^4 x) dx$ ב. $\int \cos^4 x dx$

ג. $\int \sin^4 4x dx$ ד. $\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx$

ה. $\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx$

תשובות סופיות:

(1) א. $\frac{x^4}{4} + c$ ב. $2x^6 + c$ ג. $\frac{x^5}{5} + c$ ד. $\frac{x^4}{2} + c$ ה. $\frac{x^6}{9} + c$ ו. $7x + c$

ז. $\frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c$ ח. $\frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c$

(2) א. $-\frac{x^{-2}}{2} + c$ ב. $-\frac{1}{2x^2} + c$ ג. $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c$ ד. $2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$

(3) א. $\frac{x^{1.5}}{1.5} + c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$ ג. $2\sqrt{x} + c$ ד. $8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c$

(4) א. $\frac{(5x-1)^4}{20} + c$ ב. $-\frac{3(2-7x)^5}{35} + c$ ג. $-\frac{3}{6x+5} + c$

ד. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c$ ה. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$

(5) א. $x-7$ ב. $x^2 + 2x + 5$ ג. $x^3 - 2x^2 + 5x - 1$

ד. $x^2 - x - 3$ ה. $x^2 - 4$

$$\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + c \quad \text{ג.} \quad \frac{x^3}{3} + x^2 + 5x + c \quad \text{ב.} \quad \frac{x^2}{2} - 7x + c \quad \text{א.} \quad (6)$$

$$\cdot \frac{x^5}{5} - x^2 + x + c \quad \text{ו.} \quad \frac{x^3}{3} - 4x + c \quad \text{ה.} \quad \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c \quad \text{ד.}$$

$$-\frac{1}{2(x^2 - 4x + 1)} + c \quad \text{ג.} \quad -\frac{1}{3(x^3 + 6)} + c \quad \text{ב.} \quad \frac{1}{x^2 - 1} + c \quad \text{א.} \quad (7)$$

$$(x^2 + 1)^4 + c \quad \text{ו.} \quad -6\sqrt{x - x^2} + c \quad \text{ה.} \quad \sqrt{x^2 + 2} + c \quad \text{ד.}$$

$$\cdot \frac{(6x - x^3)^3}{9} + c \quad \text{ז.}$$

$$\frac{\sin 3x}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4 \tan 3x}{3} + c \quad \text{ב.} \quad -\cos x - 3 \sin x + 4 \tan x + 5x + c \quad \text{א.} \quad (8)$$

$$\cdot \cos(\pi - x) + \tan x + x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\frac{\sin 2x}{2} + c \quad \text{ג.} \quad -\frac{\cos 6x}{12} + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{א.} \quad (9)$$

$$\cdot \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{ד.}$$

$$\cdot \frac{1}{3} \sin^3 x + c \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{\cos x} + c \quad \text{ב.} \quad 2\sqrt{\sin x} + c \quad \text{א.} \quad (10)$$

$$-\frac{1}{10} \cot 10x + c \quad \text{ג.} \quad \frac{1}{4} \tan 4x + c \quad \text{ב.} \quad -\frac{1}{2} \cos 2x - 12 \sin \frac{x}{3} + c \quad \text{א.} \quad (11)$$

$$x - \frac{1}{2} \cos 2x + c \quad \text{ו.} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ה.} \quad \frac{1}{2} \sin 2x + c \quad \text{ד.}$$

$$\tan x - \cot x + c \quad \text{ט.} \quad \tan x - x + c \quad \text{ח.} \quad -\frac{1}{16} \cos 4x + c \quad \text{ז.}$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{16} \sin 8x + c \quad \text{יא.} \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \sin 2x + c \quad \text{י.}$$

$$\frac{3}{8}x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{32} \sin 4x + c \quad \text{ב.} \quad \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \sin 4x + c \quad \text{א.} \quad (12)$$

$$-\cot x - x + c \quad \text{ד.} \quad \frac{3}{8}x - \frac{1}{16} \sin 8x + \frac{1}{128} \sin 16x + c \quad \text{ג.}$$

$$-\cos x - \frac{1}{4} \cos 2x + c \quad \text{ה.}$$

מציאת פונקציה קדומה:

שאלות:

- (1) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$. מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2, -1)$.
- (2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$. ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.
- (3) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x^2 - 8x + 2$. נתון: $f(-2) = 1$.
 - א. מצא את $f(x)$.
 - ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.
- (4) נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x) = 9x^2 - 4$. ערך הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 3.
 - א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.
 - ב. מצא את $f(x)$.
 - ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.
- (5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 3$. לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.
 - א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
 - ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.
- (6) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -6x - 5$. המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 - א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.
 - ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.
 - ג. מצא את משוואת המשיק.

- (7) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x - 4$.
 הישר $y = 2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

תשובות סופיות:

- (1) $f(x) = x^3 - 7x + 5$
- (2) $f(x) = x^2 - 6x + 14$
- (3) א. $f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23\frac{2}{3}$ ב. $y = -5x + 27$
- (4) א. $y = 5x - 2$ ב. $f(x) = 3x^3 - 4x + 4$ ג. $(0, -2)$, $(0.4, 0)$
- (5) א. $x = 0$ ב. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
- (6) א. $x = -1$ ב. $f(x) = -3x^2 - 5x - 8$ ג. $y = x - 5$
- (7) $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 4x + 11$